CLEAI, matematica generale, primo semestre 2003-2004
Soluzioni degli esercizi della prova scritta del 3 giugno 2004

Studio di funzione:
Disegnare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) := xe^{x^3}$$

Svolgimento:
La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Dunque i limiti vanno fatti soltanto in $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-3x^2e^{-x^3}} = 0;$$
$$\lim_{x\to+\infty} xe^{x^3} = +\infty.$$

Visti i limiti appena calcolati, deduciamo che:

- non ci sono asintoti verticali;
- $y = 0$ è asintoto orizzontale verso $-\infty$;
- potrebbe esserci un asintoto obliquo verso $+\infty$. Ma poiché

  $$\lim_{x\to+\infty} (xe^{x^3})/x = \lim_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty$$

  ne deduciamo che non ci sono asintoti obliqui verso $+\infty$.

La monotonia è data dal segno della derivata prima.

$$f'(x) = (xe^{x^3})' = e^{x^3} + x(3x^2e^{x^3}) = e^{x^3}(3x^3 + 1).$$

Il fattore e^{x^3} ha segno sempre positivo, mentre $3x^3 + 1$ è positivo nell'intervallo $(-1/\sqrt[3]{3}, +\infty)$. Dunque f è crescente in tale intervallo, e il punto $(-1/\sqrt[3]{3}, f(-1/\sqrt[3]{3}) = -1/\sqrt[3]{3e})$ è un minimo locale e globale.

La concavità è data dal segno della derivata seconda.

$$f''(x) = (e^{x^3}(3x^3 + 1))' = 3x^2e^{x^3}(4 + 3x^3).$$

Il fattore $3x^2e^{x^3}$ ha segno sempre positivo, mentre $4+3x^3$ è positivo nell'intervallo $(-\sqrt[3]{4/3}, +\infty)$. Dunque la concavità di f è rivolta verso l'alto in tale intervallo, e il punto $(-\sqrt[3]{4/3}, f(-\sqrt[3]{4/3}) = -\sqrt[3]{4/(3e^4)})$ è un flesso a tangente obliqua.

Collazionando tutte le suddette informazioni (e calcolando inoltre $f(0) = 0$), si ottiene il grafico di f (figura 1).

Studio di grafico di funzione:

Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 2, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 3; (l) punti di non derivabilità.

Svolgimento:

(a) $\mathrm{CE} = (-5, -2] \cup (-1, +\infty)$, $\mathrm{CE}' = [-5, -2] \cup [-1, +\infty]$.

(b) Gli zeri sono le ascisse delle intersezioni con l'asse x, cioé $\{-3, 2, 5\}$.

(c) Intersezioni con l'asse x: $(-3, 0)$, $(2, 0)$, $(5, 0)$. Intersezioni con l'asse y: $(0, -2)$.

(d) Il segno è positivo in $(-5, -3) \cup (2, 5)$, negativo in $[-3, -2) \cup (-1, 2) \cup (5, +\infty)$.

(e) Le discontinuità vanno cercate nel campo di esistenza della funzione, e graficamente corrispondono a "salti" nel grafico. Nel nostro caso, non ci sono salti nel campo di esistenza.

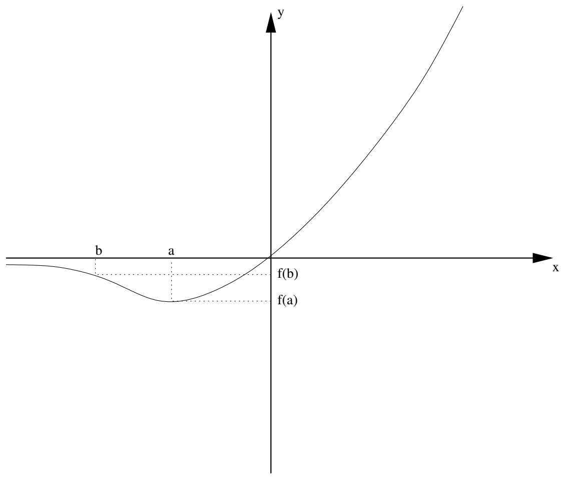

Figura 1: Grafico di f. Notare che essendo la funzione un prodotto di funzioni elementari continue e derivabili, non si hanno punti di discontinuità o di non derivabilità. Con $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ abbiamo indicato rispettivamente il minimo e il flesso.

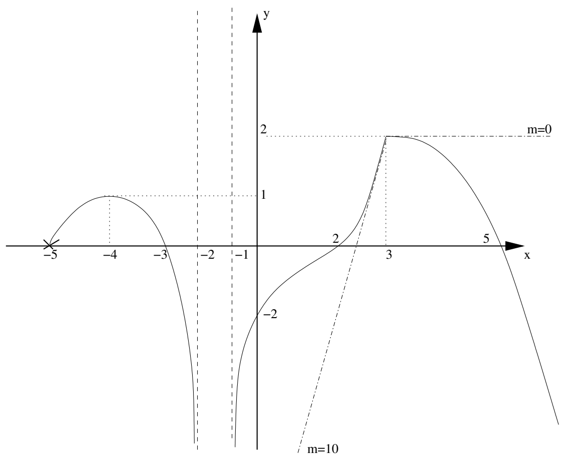

Figura 2: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

(f) Poiché la funzione è continua in tutto il suo campo d'esistenza, i limiti non banali sono quelli in $\mathrm{CE}' - \mathrm{CE} = \{-5, -2, -1, +\infty\}$.

$$\lim_{x\to -5^+} f(x) = 0;$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty;$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty;$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

(g) $x = -2$ e $x = -1$ sono asintoti verticali.

(h) I punti critici sono i punti in cui la tangente è orizzontale (cioé i punti in cui la derivata è zero): abbiamo solo $(-4, 1)$ (nel punto $(3, 2)$ la funzione non è derivabile, vedi (l)) .

(i) La funzione è monotona crescente in $(-5, -4) \cup (-1, 3)$, monotona decrescente in $(-4, -2) \cup (3, +\infty)$.

(j) Massimo globale: $(3, 2)$. Minimo globale: non esiste. Massimi locali: $(3, 2)$ e $(-4, 1)$. Minimi locali: non esistono.

(k) La tangente sinistra in 3 è $y - 2 = 10(x - 3)$, la tangente destra in 3 è $y = 2$.

(l) Le tangenti destra e sinistra di f in 3 sono diverse, dunque f non è derivabile in 3.

Massimi e minimi:

Determinare i minimi e i massimi (locali e globali) sull'intervallo $(-1, 3]$ della seguente funzione:

$$f(x) := x^2 - 1$$

Svolgimento:

L'esercizio è immediatamente risolto per via grafica osservando che $x^2 - 1$ è una parabola con concavità verso l'alto e vertice in $(0, -1)$. Dunque $(0, -1)$ è un minimo, sia globale che locale, e $(3, 8)$ è un massimo, anch'esso globale e locale.

Teorico:

Dire se $f(x) := 2 \ln \sqrt{x^5 + 1}$ assume il valore 1 nell'intervallo $[0, \sqrt[5]{e^2 - 1}]$ (giustificare la risposta).

Svolgimento:

Si usa il teorema dei valori intermedi: poiché f è continua nell'intervallo $[0, \sqrt[5]{e^2 - 1}]$, e agli estremi si ha $f(0) = 0$, $f(\sqrt[5]{e^2 - 1}) = 2$, ne consegue che f assumerà tutti i valori compresi tra 0 e 2, in particolare 1.

Punti fissi:

Trovare i punti fissi di $f(x) := x^3 - x + 1$.

Svolgimento:

I punti fissi di f sono le soluzioni dell'equazione $x^3 - x + 1 = x$. Dunque il problema è equivalente a trovare gli zeri di $F(x) = x^3 - 2x + 1$.

Poiché $F(1) = 0$, possiamo scomporre F come $(x - 1)(x^2 + x - 1)$. Il secondo fattore ha delta positivo, dunque gli zeri di F (che coincidono con i punti fissi di f) sono esattamente tre: $x_0 = 1$, $x_1 = (-1 - \sqrt{5})/2$, $x_2 = (-1 + \sqrt{5})/2$.

Zeri:

Trovare gli zeri di $f(x) := x^3 - 2x + 1$.

Svolgimento:

Vedi esercizio precedente.